TEOREMAS DE WEIERSTRASS, BOLZANO, ROLLE Y VALOR MEDIO

1. Sea f: $[0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

   a) ¿Es continua en [0, 1)?

   b) ¿Alcanza un mínimo absoluto en el intervalo [0, 1)?

   c) ¿Contradice esto el teorema de Weierstrass? ¿Por qué?

Solución: a) Sí; b) No; c) No contradice el teorema de Weierstrass, pues el intervalo considerado [0, 1) no es cerrado.

2. Se dice que una raíz de una ecuación está separada cuando se ha encontrado un intervalo en el que la ecuación tiene una única raíz. Separar con ayuda del teorema de Bolzano, las raíces de las ecuaciones:

$$2x^4 - 14x^2 + 14x - 1 = 0 \qquad\qquad 2x^4 - 13x^2 + 15 = 0$$

3. Para las siguientes funciones polinómicas, se pide hallar dos enteros consecutivos n y n+1 tales que f tenga una raíz entre n y $n + 1$:

$$f(x) = 2x^3 + x - 1$$
$$f(x) = x^4 - 3x^2 + x + 1$$
$$f(x) = x^5 - 4x^3 - 1$$

4. Aplicando el teorema de Bolzano, demostrar que la ecuación $x^3 + x - 3 = 0$ tiene una raíz comprendida entre 1 y 2.

5. Dada la ecuación $x^3 + 5x^2 - 10 = 0$, encontrar tres intervalos cerrados de modo que en el interior de cada uno de ellos haya una raíz de la ecuación.

6. Demostrar que la ecuación $2x^3 - 6x + 1 = 0$ tiene una única solución real en el intervalo (0, 1). Enunciar los teoremas utilizados en el razonamiento.

7. Demostrar que la función $f(x) = x\,(1 + \operatorname{sen} x)$ toma el valor 2, es decir, $\exists\, x_0 \in \mathbb{R}$ tal que:

$$x_0\,(1 + \operatorname{sen} x_0) = 2$$

8. Probar que existe un número x tal que $2x - 1 = \cos x$.

9. La función $f(x) = \operatorname{tg} x$ toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo $\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$ y sin embargo no se anula en él. ¿Contradice este ejemplo el teorema de Bolzano?

10. La función $f(x) = \dfrac{1}{x}$ toma valores de signo contrario en los extremos del intervalo cerrado [–2, 2], y sin embargo, no se anula en él. Explicar esta aparente contradicción con el teorema de Bolzano.

11. Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ en el intervalo [–1, 1]. ¿Se cumple el teorema de Bolzano?. Razonar la respuesta.

Solución: f no es continua en $x = 0$. No se cumple.

12. Probar que la función $f(x) = \dfrac{6}{2 + sen\, x}$ alcanza el valor 4 en el intervalo $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

13. Para la función $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$, ¿Podemos afirmar que existe $c \in [0, 1]$ verificando $f(c) = 0$?. Calcula dicho valor c.
Solución: No. $c = \dfrac{1}{2}$

14. ¿Se puede afirmar que la función $f(x) = x^3 + x^2 - 7x + 1$ corta al eje de abscisas en al menos un punto del intervalo $(-1, 0)$? ¿Y del $(0, 1)$?
Solución: No. Sí.

15. Probar que las gráficas de las funciones $f(x) = \text{Ln}\, x$ y $g(x) = e^{-x}$ se cortan en algún punto y localizarlo aproximadamente.

16. Hallar los valores a y b de forma que sea aplicable el teorema de Bolzano a la función

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } -\pi \le x \le 0 \\ a + x^2 & \text{si } \quad 0 < x < 1 \\ \dfrac{b}{x} & \text{si } \quad 1 \le x \le \pi \end{cases}$$

en el intervalo $[-\pi, \pi]$, calculando el punto del interior c al que hace mención dicho teorema.
Solución: $a = 1$, $b = 2$, $c = -\dfrac{\pi}{2}$

17. Demostrar que la ecuación $x^3 - 3x + b = 0$ tiene como máximo una raíz en el intervalo $[-1, 1]$. ¿Para qué valores de b hay exactamente una raíz de dicha ecuación en dicho intervalo?
Solución: Hay una única raíz cuando $|b| \le 2$.

18. Demostrar que la ecuación: $\dfrac{x^2}{2} - \text{Ln}(x-1)^2 = \dfrac{5}{2}$ tiene una única solución en $(2, 1 + e)$.

19. Demostrar que la ecuación $2x^3 - 6x + 1 = 0$ tiene una única solución en el intervalo $(0, 1)$. Enunciar los teoremas utilizados en el razonamiento.

20. Demostrar que la ecuación $e^x = x + 1$ tiene una única solución.

21. Demostrar que la ecuación $x^2 = x \text{ sen } x + \cos x$ tiene exactamente dos soluciones.

22. Demostrar que la ecuación $2x^2 = x\,(\text{sen } x + \cos x) + \cos x - \text{sen } x$ tiene exactamente dos soluciones.

23. Demostrar que la ecuación $x^3 + 6x^2 + 15x - 13 = 0$ tiene una única solución.

24. Demostrar que la función $f(x) = \dfrac{1}{2^x} - x$ tiene una única raíz real x_0 y calcular su parte entera.
Solución: $x_0 = 0$

25. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación 3 Ln $x = x$?
Solución: Dos.

26. Consideremos la función $f(x) = \begin{cases} ax-3 & \text{si } x<4 \\ -x^2+10x-b & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

Determinar a, b para que f cumpla las hipótesis del teorema de Lagrange en el intervalo [2, 6], y calcular el o los valores intermedios vaticinados por dicho teorema.

Solución: $a = 2$, $b = 19$; $c = \dfrac{9}{2}$

27. Comprobar que la función $f(x) = -x^2 + 2x + 5$ cumple las condiciones del teorema de Rolle en el intervalo [−1, 3], y que efectivamente verifica dicho teorema.

28. ¿Se puede aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x) = |\cos x|$ en el intervalo $[0, \pi]$? Razonar la respuesta.

Solución: No, f no es derivable en $x = \dfrac{\pi}{2} \in [0, \pi]$.

29. ¿Se puede aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2}$ en el intervalo [−3, 5]? Justificar la respuesta.
Solución: No, f no es derivable en $x = 1 \in [-3, 5]$.

30. La función $f(x) = 1-\sqrt[5]{x^4}$ se anula en los extremos del intervalo [−1, 1]. Demostrar que la derivada de esta función no se anula en ningún punto de dicho intervalo. ¿Contradice este resultado el teorema de Rolle?. Explicar el por qué.

31. Dada la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } -2 \leq x < -1 \\ \dfrac{x^2-3}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 0 \end{cases}$. Probar que f satisface las hipótesis del teorema del valor medio y calcular el o los valores intermedios vaticinados por dicho teorema.

Solución: $c = -\sqrt{2}$, $-\dfrac{1}{2}$

32. Empleando el teorema del valor medio, hallar una cota superior del error que se comete al considerar que $\sqrt[5]{34} = 2$

33. Comprobar que a la función $f(x) = x^2 + 2x$ le es aplicable el teorema del valor medio en [1, 3] y encontrar los puntos en los que se cumple el teorema.
Solución: $c = 2$.

34. Averiguar si es aplicable el teorema del valor medio a la función $f(x) = 2x + \operatorname{sen} x$ en $[0, \pi]$ y en caso afirmativo encontrar los puntos en los que se verifica.

Solución: $c = \dfrac{\pi}{2}$

35. Aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x) = x^2 - 6x$ escogiendo convenientemente el intervalo $[a, b]$.

36. Hallar las constantes a, b y c para que la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & si \quad x < 2 \\ bx + c & si \quad x \geq 2 \end{cases}$ cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [0, 4].

Solución: $a = -3$, $b = 1$, $c = -4$